*-代数上の汎関数の一般不確定性関係への応用 (情報科学としての函数解析とその周辺)

栗山, 憲; 古市, 茂; 柳, 研二郎

数理解析研究所講究録 1340 巻 2003 年 170-182

*-代数上の汎関数の一般不確定性関係への応用

栗山　憲 (Ken Kuriyama)
山口大・工
(Department of Applied Science, Yamaguchi University)
古市　茂 (Shigeru Furuichi)
山口東京理科大・基礎工
(Department of Electronics and Computer Science,
Tokyo University of Science in Yamaguchi)
柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)
山口大・工
(Department of Applied Science, Yamaguchi University)

1　はじめに

量子観測理論において、 Holevo は “U における測定” という概念を導入し，一般化された不確定性関係を証明した [1].
$B(\mathcal{H})$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体からなる集合とし，$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の密度作用素全体からなる凸集合とする．U を R^n の部分集合とするとき，$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ から U 上の確率測度全体からなる凸集合への写像 $S \to \mu_S$ は，条件

$$\mu_{\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_{S_i}$$

を満たすとき，U に値をとる観測（U-観測）と呼ばれる．ここで，$S_i \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}), \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ とする．

U-観測と単位の分解（positive operator-valued measure　POVM) との間には次の関係が成り立つ.
U-観測 μ に対して，POVM $\{M(B) : B \in \mathcal{A}(U)\}$ が存在して，$\mu_S(B) = \mathrm{tr}SM(B)$ for $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ and $B \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ となる．逆に POVM $\{M(B) : B \in \mathcal{A}(U)\}$ に対して，

$\mu_S(B) = \mathrm{tr}SM(B)$ for $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ and $B \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ とおくと，写像 μ は U-観測である．

実数値観測 M の $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ に関する期待値 $E_S\{M\}$ と分散 $D_S\{M\}$ を

$$\begin{aligned} E_S\{M\} &= \int \lambda d\mu_S(\lambda), \\ D_S\{M\} &= \int (\lambda - E_S(\lambda))^2 d\mu_S(\lambda). \end{aligned}$$

と定義する．実数値観測 M_1 と M_2 に対して，Holevo は 一般化された不確定性関係

$$D_S\{M_1\} D_S\{M_2\} \geq \frac{1}{4}|[X_{M_1}, X_{M_2}]_S|^2. \tag{1.1}$$

を証明した．(詳しくは [1, 2] を参照)

その証明で鍵となるのは，

(1) 実数値観測 M に対して，ヒルベルト空間 $\mathcal{L}^2(S)$ の元 X_M が定義されること

(2) 次の不等式が成り立つこと

$$\langle X_{M_1}, X_{M_1}\rangle_S \langle X_{M_2}, X_{M_2}\rangle_S \geq \frac{1}{4}|[X_{M_1}, X_{M_2}]_S|^2, \quad for\ \ X_{M_1}, X_{M_2} \in \mathcal{L}^2(S). \tag{1.2}$$

の 2 点である．

本論文の目的は不等式 (1.2) を一般的な状況，すなわちフォン・ノイマン代数上の正規状態ではなく *-代数上の正値線形汎関数に対して証明することである．

2 *-代数上の正値線形汎関数によるヒルベルト空間

代数 $\mathcal{A}$ は次の条件を満たす対合と呼ばれる $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ 自身への写像 $\mathcal{A} \ni x \mapsto x^* \in \mathcal{A}$ をもつとき，*-代数という．

(i) $(x+y)^* = x^* + y^*$.

(ii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$.

(iii) $(xy)^* = y^* x^*$.

(iv) $(x^*)^* = x$.

ω を *-代数 $\mathcal{A}$ 上の正値線形汎関数，すなわち $\omega(x^*x) \geq 0$ for $x \in \mathcal{A}$ とする．ω からヒルベルト空間を構成するが，通常のもの以外のヒルベルト空間も構成する．

$\langle x, y\rangle_\omega^+ = \omega(y^*x)$, $\langle x, y\rangle_\omega^- = \omega(xy^*)$ 及び $\langle x, y\rangle_\omega = \frac{1}{2}\{\omega(y^*x) + \omega(xy^*)\}$ とおく．これらは必ずしも内積ではなく，一般には前内積であることより商空間を考える．

$\mathcal{N}_\omega^+ = \{x \in A : \omega(x^*x) = 0\}$, $\mathcal{N}_\omega^- = \{x \in A : \omega(xx^*) = 0\}$ および $\mathcal{N}_\omega = \mathcal{N}_\omega^+ \cap \mathcal{N}_\omega^-$ とおく．

写像 $\eta_\omega^+ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^+$，$\eta_\omega^- : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^-$ および $\eta_\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ を標準写像，すなわち $x \in \mathcal{A}$ に対して $\eta_\omega^+(x) = x + \mathcal{N}_\omega^+$，$\eta_\omega^-(x) = x + \mathcal{N}_\omega^-$，$\eta_\omega(x) = x + \mathcal{N}_\omega$ とおく．

複素線形空間 $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^+$, $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^-$，$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上にそれぞれ内積 $\langle,\rangle_\omega^+$，$\langle,\rangle_\omega^-$，$\langle,\rangle_\omega$ を以下のように導入し，

$$\begin{aligned}
\langle \eta_\omega^+(x), \eta_\omega^+(y)\rangle_\omega^+ &= \omega(y^*x) \quad for \quad \eta_\omega^+(x), \eta_\omega^+(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^+ \\
\langle \eta_\omega^-(x), \eta_\omega^-(y)\rangle_\omega^- &= \omega(xy^*) \quad for \quad \eta_\omega^-(x), \eta_\omega^-(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^- \\
\langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega &= \frac{1}{2}\{\omega(y^*x) + \omega(xy^*)\} \quad for \quad \eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^+$，$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^-$，$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ の内積 $\langle,\rangle_\omega^+$，$\langle,\rangle_\omega^-$，$\langle,\rangle_\omega$ による完備化をそれぞれ $\mathcal{H}_\omega^+$，$\mathcal{H}_\omega^-$，$\mathcal{H}_\omega$ とする．また，$\mathcal{H}_\omega$ から $\mathcal{H}_\omega^+$($\mathcal{H}_\omega^-$) への線形作用素 j_ω^+ (j_ω^-) を次のように定義する．

$j_\omega^+ : \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega \ni \eta_\omega(x) \mapsto \eta_\omega^+(x) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^+$ $\quad$ $(resp.\ j_\omega^- : \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega \ni \eta_\omega(x) \mapsto \eta_\omega^-(x) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^-.)$

命題 2.1 ω を *-代数 $\mathcal{A}$ 上の正値線形汎関数とする．

(1) 作用素 j_ω^+ は有界である．

$$\|j_\omega^+(\eta_\omega(x))\|_\omega^+ \leq \sqrt{2}\|\eta_\omega(x)\|_\omega \quad for \quad \eta_\omega(x) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega.$$

故に，j_ω^+ は $\mathcal{H}_\omega$ から $\mathcal{H}_\omega^+$ への有界作用素に拡張され，

$$\|j_\omega^+(X)\|_\omega^+ \leq \sqrt{2}\|X\|_\omega \quad for \quad X \in \mathcal{H}_\omega.$$

となる．

(2) 作用素 j_ω^- は有界である．

$$\|j_\omega^-(\eta_\omega(x))\|_\omega^- \leq \sqrt{2}\|\eta_\omega(x)\|_\omega \quad for \quad \eta_\omega(x) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega.$$

故に，j_ω^- は $\mathcal{H}_\omega$ から $\mathcal{H}_\omega^-$ への有界作用素に拡張され，

$$\|j_\omega^-(X)\|_\omega^- \leq \sqrt{2}\|X\|_\omega \quad for \quad X \in \mathcal{H}_\omega.$$

となる．

注 2.2 $x \in \mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^+$ 上の線形作用素 $\pi_\omega^+(x)$ を以下のように定義する．

$$\pi_\omega^+(x)\eta_\omega^+(y) = \eta_\omega^+(xy) \quad for \quad \eta_\omega^+(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^+.$$

同様に $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^-$ 上の線形作用素 $\pi_\omega^-(x)$ を次のように定義する．

$$\pi_\omega^-(x)\eta_\omega^-(y) = \eta_\omega^-(xy) \quad for \quad \eta_\omega^-(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^-.$$

このとき $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^+$ 上の非有界作用素代数 への写像 $\pi_\omega^+(x)$ は*-準同型である．すなわち

$$\begin{aligned}
\pi_\omega^+(x+y) &= \pi_\omega^+(x) + \pi_\omega^+(y), \\
\pi_\omega^+(\lambda x) &= \lambda\pi_\omega^+(x), \\
\pi_\omega^+(xy) &= \pi_\omega^+(x)\pi_\omega^+(y), \\
\pi_\omega^+(x^*) &= \pi_\omega^+(x)^*.
\end{aligned}$$

同様に，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^-$ 上の非有界作用素代数への写像 $\pi_\omega^-(x)$ は*-反準同型である．すなわち，

$$\begin{aligned}
\pi_\omega^-(x+y) &= \pi_\omega^-(x) + \pi_\omega^-(y), \\
\pi_\omega^-(\lambda x) &= \lambda\pi_\omega^-(x), \\
\pi_\omega^-(xy) &= \pi_\omega^-(y)\pi_\omega^-(x), \\
\pi_\omega^-(x^*) &= \pi_\omega^-(x)^*.
\end{aligned}$$

この $(\pi_\omega^+(x), \mathcal{H}_\omega^+)$ $((\pi_\omega^-(x), \mathcal{H}_\omega^-))$ を $\mathcal{A}$ の左 *GNS-*構成 *(*右 *GNS-*構成*)* という *[3].*

注 2.3 複素線形空間 $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上に次のような半双線形形式を導入する．

$$\langle\eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega^+ = \omega(y^*x), \langle\eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega^- = \omega(xy^*) \quad for \quad \eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega,$$

このとき，内積 $\langle\eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega$ は次の等式によって表される．

$$\langle\eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega = \frac{1}{2}\left\{\langle\eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega^+ + \langle\eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega^-\right\} \quad for \quad \eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$$

なお，$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上の上記の半双線形形式を表すのに煩雑さを避けるために，$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^+$ および $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^-$ 上の内積と同じ記号を用いた．

3 正値線形汎関数によるヒルベルト空間の実部

*-代数 $\mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A}_h = \{x \in \mathcal{A} : x^* = x\}$ とおくと $\mathcal{A}_h$ は $\mathcal{A}$ の実線形部分空間である．

$$x = \frac{x^*+x}{2} + i\frac{x-x^*}{2i}, \quad \frac{x^*+x}{2} \in \mathcal{A}_h, \frac{x-x^*}{2i} \in \mathcal{A}_h \ for\ x \in \mathcal{A},$$

だから，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_h$ の線形空間としての複素化である．

補題 3.1 $\mathcal{A}$ を *-代数とし，ω を $\mathcal{A}$ 上の正値線形汎関数とする．このとき

(1) $\langle x,y\rangle_\omega = Re\langle x,y\rangle_\omega^+ = Re\langle x,y\rangle_\omega^-$ *for* $x,y \in \mathcal{A}_h$.

(2) $\langle x,x\rangle_\omega = \langle x,x\rangle_\omega^+ = \langle x,x\rangle_\omega^-$ *for* $x \in \mathcal{A}_h$.

(証明)

(1) 任意の $x,y \in \mathcal{A}_h$ に対して，$\langle x,y\rangle_\omega^- = \overline{\langle x,y\rangle_\omega^+}$. である．したがって，

$$\langle x,y\rangle_\omega = \frac{1}{2}\left\{\langle x,y\rangle_\omega^+ + \langle x,y\rangle_\omega^-\right\} = \frac{1}{2}\left\{\langle x,y\rangle_\omega^+ + \overline{\langle x,y\rangle_\omega^+}\right\} = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle_\omega^+.$$

同様に，$\langle x,y\rangle_\omega = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle_\omega^-$

(2) (1) と $\langle x,x\rangle_\omega^+ \in \mathrm{R}$ から，$\langle x,x\rangle_\omega = \mathrm{Re}\langle x,x\rangle_\omega^+ = \langle x,x\rangle_\omega^+$ for $x \in \mathcal{A}_h$

同様に，$\langle x,x\rangle_\omega = \langle x,x\rangle_\omega^-$ for $x \in \mathcal{A}_h$ を示すことができる．

■

正値線形汎関数 ω による実ヒルベルト空間を導入しよう．形式 $\langle x,y\rangle_\omega$ は実線形空間 $\mathcal{A}_h$ 上の実数値の前内積である．また，$\mathcal{N}_\omega^h = \{x \in \mathcal{A}_h : \langle x,x\rangle_\omega = 0\}$, $\mathcal{N}_\omega^h$ は $\mathcal{A}_h$ の実線形部分空間である．

補題 3.2 *(1)* $\mathcal{N}_\omega^h = \{x \in \mathcal{A}_h : \langle x,x\rangle_\omega^+ = 0\} = \{x \in \mathcal{A}_h : \langle x,x\rangle_\omega^- = 0\}$.

(2) 複素線形空間 $\mathcal{N}_\omega$ は $\mathcal{N}_\omega^h$ の複素化である．すなわち
任意の $x \in \mathcal{N}_\omega$ に対して，一意的に $x_1, x_2 \in \mathcal{N}_\omega^h$ が存在して，$x = x_1 + ix_2$ となる．

(証明)

(1) 補題3.1の (1) から明らか．

(2) $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_h$ の複素化であることより，$x_1, x_2 \in \mathcal{A}_h$ が存在して $x = x_1 + ix_2$ となる．$\langle x, x\rangle_\omega = \langle x_1 + ix_2, x_1 + ix_2\rangle_\omega = \langle x_1, x_1\rangle_\omega + \langle x_2, x_2\rangle_\omega$ だから，$0 = \langle x, x\rangle_\omega = \langle x_1, x_1\rangle_\omega + \langle x_2, x_2\rangle_\omega$，$0 = \langle x_1, x_1\rangle_\omega = \langle x_2, x_2\rangle_\omega$ となる．故に，$x_1, x_2 \in \mathcal{N}_\omega^h$ である．

■

作用素 $\eta_\omega^h : \mathcal{A}_h \longrightarrow \mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h$ を下記のような実線形作用素とする．

$$\eta_\omega^h(x) = x + \mathcal{N}_\omega^h \quad for \quad x \in \mathcal{A}_h.$$

補題 3.3 複素線形空間 $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ は $\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h$ の複素化である．

(証明) 写像 $\hat{\jmath} : \mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ を $\hat{\jmath}(\eta_\omega^h(x)) = \eta_\omega(x)$ for $x \in \mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h$ とおく．まず写像 $\hat{\jmath}$ が単射であることを示そう．$x \in \mathcal{A}_h$ に対して $\hat{\jmath}(\eta_\omega^h(x)) = 0$ とする．このとき，$\eta_\omega(x) = \hat{\jmath}(\eta_\omega^h(x)) = 0$ から $x \in \mathcal{N}_\omega$ となる．故に，$x \in \mathcal{A}_h \cap \mathcal{N}_\omega$ から $\eta_\omega^h(x) = 0$ である．したがって $\hat{\jmath}$ は単射である．このようにして実線形空間 $\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h$ は $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ の実線形部分空間 $\hat{\jmath}(\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h)$ と同一視できる．

次に $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ は $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^h$ の複素化であることを示そう．任意に点 $\eta_\omega(x) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ をとる．$x_1, x_2 \in \mathcal{A}_h$ が存在して $x = x_1 + x_2$ となる．そこで，$\hat{\jmath}(\eta_\omega^h(x_1)) + i\hat{\jmath}(\eta_\omega^h(x_2)) = \eta_\omega(x_1) + \eta_\omega(x_2) = \eta_\omega(x_1 + x_2) = \eta_\omega(x)$ となる．故に $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega = \mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h + i\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h$ を得る．

最後に $\hat{\jmath}(\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h) \cap i\hat{\jmath}(\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h) = \{0\}$ を示す．任意に点 $\eta_\omega(x) \in \hat{\jmath}(\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h) \cap i\hat{\jmath}(\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h)$，$x \in \mathcal{A}$ をとる．$\eta_\omega(x) \in \hat{\jmath}(\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h)$ だから，$y \in \mathcal{A}_h$ が存在して $\eta_\omega(x) = \hat{\jmath}(\eta_\omega^h(y)) = \eta_\omega(y)$ となる．

同様にして，$z \in \mathcal{A}_h$ が存在して $\eta_\omega(x) = i\hat{\jmath}(\eta_\omega^h(z)) = i\eta_\omega(z) = \eta_\omega(iz)$ となる．このとき，$\eta_\omega(y) = \eta_\omega(x) = \eta_\omega(iz)$ を得る．そこで $y - iz \in \mathcal{N}_\omega$ となる．$\mathcal{N}_\omega = \mathcal{N}_\omega^+ \cap \mathcal{N}_\omega^-$ だから，$\omega\{(y-iz)^*(y-iz)\} = \omega\{(y-iz)(y-iz)^*\} = 0$ である．$y, z \in \mathcal{A}_h$ だから，次の等式を得る．

$$\omega(y^2) + \omega(z^2) + i\omega(zy) - i\omega(yz) = 0,$$
$$\omega(y^2) + \omega(z^2) + i\omega(yz) - i\omega(zy) = 0.$$

故に $\omega(y^2) + \omega(z^2) = 0$ である．$\omega(y^2) \geq 0$ で $\omega(z^2) \geq 0$ であるので，$\omega(y^2) = \omega(z^2) = 0$ である．こうして $y, z \in \mathcal{N}_\omega$ を得た．したがって $\eta_\omega(x) = \eta_\omega(y) = 0$ である．証明終わり． ■

実線形空間 $\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h$ 上に内積を以下のように入れる．：

$$\langle \eta_\omega^h(x), \eta_\omega^h(y)\rangle_\omega = \langle x, y\rangle_\omega \quad for \quad x, y \in \mathcal{A}_h.$$

実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\omega^h$ を $\mathcal{A}_h/\mathcal{N}_\omega^h$ の完備化とする．$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ は $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^h$ の複素化であり，$\mathcal{H}_\omega$ は $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ の完備化であり，$\mathcal{H}_\omega^h$ は $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega^h$ の完備化だから，次の命題を得る．

命題 3.4 複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\omega$ は実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\omega^h$ の複素化である．

4 正値線形汎関数から導入される半双線形形式と作用素

この節では，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\omega$ 上の半双線形形式を導入し，それらの半双線形形式の間の関係を調べる．$\mathcal{A}$ を *-代数とし ω を $\mathcal{A}$ 上の正値線形汎関数とする．$\mathcal{A}$ 上の半双線形形式 $[x,y]_\omega$ を，

$$[x,y]_\omega = i\omega[x,y^*] = \{\omega(xy^*) - \omega(y^*x)\} \quad for \quad x,y \in \mathcal{A},$$

とおく．ただし $[x,y] = xy - yx$ とする．

命題 4.1 $\mathcal{A}$ を *-代数とし ω を $\mathcal{A}$ 上の正値線形汎関数とする．このとき以下のことが成り立つ．

(1) $[x,y]_\omega = i(\langle x,y\rangle_\omega^- - \langle x,y\rangle_\omega^+)$.

(2) $[x,y]_\omega$ は $\mathcal{A}$ 上の歪エルミート半双線形形式である．

(a) $[x+y,z]_\omega = [x,z]_\omega + [y,z]_\omega$,

(b) $[x,y+z]_\omega = [x,y]_\omega + [x,z]_\omega$,

(c) $[\lambda x,y]_\omega = \lambda[x,y]_\omega$,

(d) $[x,\lambda y]_\omega = \overline{\lambda}[x,y]_\omega$,

(e) $[x,y]_\omega = -\overline{[y,x]_\omega}$.

(3) $x,y \in \mathcal{A}_h$ に対して，$[x,y]_\omega = -2Im\langle x,y\rangle_\omega^- = -2Im\omega(xy) \in R$. である．したがって $[x,y]_\omega = -[y,x]_\omega$, 特に, $[x,x]_\omega = 0$ である．

補題 4.2 $\mathcal{A}$ において，下記の不等式が成り立つ．

$$|[x,y]_\omega| \leq 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} \quad for \quad x,y \in \mathcal{A}.$$

(証明) Schwartz の不等式を用いて,

$$\begin{aligned}
|[x,y]_\omega| &= |i(\omega(xy^*)-\omega(y^*x))| \\
&\leq |\omega(xy^*)|+|\omega(y^*x)| \\
&\leq \omega(xx^*)^{\frac{1}{2}}\omega(yy^*)^{\frac{1}{2}}+\omega(x^*x)^{\frac{1}{2}}\omega(y^*y)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\langle x,x\rangle_\omega^-)^{\frac{1}{2}}(\langle y,y\rangle_\omega^-)^{\frac{1}{2}}+(\langle x,x\rangle_\omega^+)^{\frac{1}{2}}(\langle y,y\rangle_\omega^+)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\langle x,x\rangle_\omega^- + \langle x,x\rangle_\omega^+)^{\frac{1}{2}}(\langle y,y\rangle_\omega^- + \langle y,y\rangle_\omega^+)^{\frac{1}{2}} \\
&= (2\langle x,x\rangle_\omega)^{\frac{1}{2}}(2\langle y,y\rangle_\omega)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2(\langle x,x\rangle_\omega)^{\frac{1}{2}}(\langle y,y\rangle_\omega)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

を得る. ■

補題 4.2 から, $x,y\in\mathcal{N}_\omega$ ならば $[x,y]_\omega=0$ となることは明らかである. そこで, 前ヒルベルト空間 $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上の半双線形形式を

$$[\eta_\omega(x),\eta_\omega(y)]_\omega=[x,y]_\omega=i\omega([x,y^*]) \quad for \quad \eta_\omega(x),\eta_\omega(y)\in\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega,$$

とおく. すると次の命題を得る.

命題 4.3 $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上の半双線形形式 $[,]_\omega$ は, 次の不等式を満たす有界な歪エルミート半双線形形式である.

$$|[\eta_\omega(x),\eta_\omega(y)]_\omega|\leq 2\|\eta_\omega(x)\|\|\eta_\omega(y)\| \quad for \quad \eta_\omega(x),\eta_\omega(y)\in\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega.$$

(証明) 補題 4.2 から

$$|[\eta_\omega(x),\eta_\omega(y)]_\omega|=|[x,y]_\omega|\leq 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}\leq 2\|\eta_\omega(x)\|\|\eta_\omega(y)\|.$$

となる. 命題 4.1 から $[,]_\omega$ が 歪エルミート半双線形形式である. ■

注 2.3 において, $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上の次のような半双線形形式を導入した.

$$\langle\eta_\omega(x),\eta_\omega(y)\rangle_\omega^+=\omega(y^*x), \quad and \quad \langle\eta_\omega(x),\eta_\omega(y)\rangle_\omega^-=\omega(xy^*).$$

このとき, $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上の半双線形形式 $\langle,\rangle_\omega^+$, $\langle,\rangle_\omega^-$ に対して次の命題が成り立つ.

命題 4.4 $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上の半双線形形式 $\langle,\rangle_\omega^+$, $\langle,\rangle_\omega^-$ は次の不等式を満たす有界な正値半双線形形式である.

$$\begin{aligned}
|\langle\eta_\omega(x),\eta_\omega(y)\rangle_\omega^+| &\leq 2\|\eta_\omega(x)\|_\omega\|\eta_\omega(y)\|_\omega \quad for \quad \eta_\omega(x),\eta_\omega(y)\in\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega, \\
|\langle\eta_\omega(x),\eta_\omega(y)\rangle_\omega^-| &\leq 2\|\eta_\omega(x)\|_\omega\|\eta_\omega(y)\|_\omega \quad for \quad \eta_\omega(x),\eta_\omega(y)\in\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega.
\end{aligned}$$

(証明) 任意の $\eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ に対して,

$$\begin{aligned} |\langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega^+| &= |\langle x, y\rangle_\omega^+| \\ &\leq \sqrt{\langle x, x\rangle_\omega^+}\sqrt{\langle y, y\rangle_\omega^+} \\ &\leq \sqrt{2\langle x, x\rangle_\omega}\sqrt{2\langle y, y\rangle_\omega} \\ &\leq 2\|\eta_\omega(x)\|_\omega\|\eta_\omega(y)\|_\omega. \end{aligned}$$

を得る. 同様に,

$$|\langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega^-| \leq 2\|\eta_\omega(x)\|_\omega\|\eta_\omega(y)\|_\omega \quad for \quad \eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega.$$

を得る. またこれらの半双線形形式は正値であることは明らかである. ■

このようにして, 前ヒルベルト空間 $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上に3個の有界な半双線形形式を入れることができた. これらの半双線形形式は有界であるので, 一意的にヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\omega = \overline{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega}$ 上に拡張できる. この半双線形形式の記号としては, $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ 上の半双線形形式の記号と同じ記号を用いることにする.

命題 4.5 $\mathcal{H}_\omega$ 上のこれらの有界な半双線形形式は下記の性質を持つ. :

(1) $\langle , \rangle_\omega^+$ 及び $\langle , \rangle_\omega^-$ は正値な半双線形形式である.

(2) $[,]_\omega$ は歪エルミート半双線形形式である.

(3) $[X, Y]_\omega = i\{\langle X, Y\rangle_\omega^- - \langle X, Y\rangle_\omega^+\}$,

(4) $\langle X, Y\rangle_\omega^+ = \langle X, Y\rangle_\omega + \frac{i}{2}[X, Y]_\omega$ *for* $X, Y \in \mathcal{H}_\omega$,

(5) $\langle X, Y\rangle_\omega^- = \langle X, Y\rangle_\omega - \frac{i}{2}[X, Y]_\omega$ *for* $X, Y \in \mathcal{H}_\omega$.

(証明) (1), (2) は明らか. (3) を示す. 任意の $\eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ に対して,

$$\begin{aligned} [\eta_\omega(x), \eta_\omega(y)]_\omega &= [x, y]_\omega \\ &= i\left\{\langle x, y\rangle_\omega^- - \langle x, y\rangle_\omega^+\right\} \\ &= i\left\{\langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega^- - \langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega^+\right\}. \end{aligned}$$

となる. $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ は $\mathcal{H}_\omega$ で稠密で, $[,]_\omega, \langle , \rangle_\omega^+, \langle , \rangle_\omega^-$ は有界だから,

$$[X, Y]_\omega = i\left\{\langle X, Y\rangle_\omega^- - \langle X, Y\rangle_\omega^+\right\} \quad for \quad X, Y \in \mathcal{H}_\omega.$$

となる．次に (4) を示そう．任意の $\eta_\omega(x), \eta_\omega(y) \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega + \frac{i}{2}[\eta_\omega(x), \eta_\omega(y)]_\omega &= \langle x, x\rangle_\omega + \frac{i}{2}[x, y]_\omega \\
&= \frac{1}{2}\left\{\langle x, y\rangle_\omega^+ + \langle x, y\rangle_\omega^-\right\} + i\frac{i}{2}\left\{\langle x, y\rangle_\omega^- - \langle x, y\rangle_\omega^+\right\} \\
&= \langle x, y\rangle_\omega^+ \\
&= \langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle_\omega^+.
\end{aligned}$$

となる．故に，$\langle X, Y\rangle_\omega^+ = \langle X, Y\rangle_\omega + \frac{i}{2}[X, Y]_\omega$ for $X, Y \in \mathcal{H}_\omega$. である． ■

それでは，フォンノイマン代数上の正規状態に対する一般化不確定性関係の鍵となる不等式 [1] の拡張である次の定理を証明しよう．

定理 4.6 複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\omega$ または実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\omega^h$ 上で，次の不等式が成り立つ．

(1) $\langle X, X\rangle_\omega \geq \frac{1}{2}\langle X, X\rangle_\omega^+$ *for* $X \in \mathcal{H}_\omega$.

(2) $\langle X, X\rangle_\omega \geq \frac{1}{2}\langle X, X\rangle_\omega^-$ *for* $X \in \mathcal{H}_\omega$.

(3) $\langle X, X\rangle_\omega \geq \frac{i}{2}[X, X]_\omega$ *for* $X \in \mathcal{H}_\omega$.

(4) $\langle X, X\rangle_\omega \geq -\frac{i}{2}[X, X]_\omega$ *for* $X \in \mathcal{H}_\omega$.

(5) $\langle X, X\rangle_\omega + \langle Y, Y\rangle_\omega \geq [X, Y]_\omega$ *for* $X, Y \in \mathcal{H}_\omega^h$.

(6) $\langle X, X\rangle_\omega \langle Y, Y\rangle_\omega \geq \frac{1}{4}|[X, Y]_\omega|^2$ *for* $X, Y \in \mathcal{H}_\omega$.

(証明) まず (1)，(2)，(3)，(4) を示す．命題 4.5 の (4)，(5) により，$X \in \mathcal{H}_\omega$ に対して $\langle X, X\rangle_\omega^\pm = \langle X, X\rangle_\omega \pm \frac{i}{2}[X, X]_\omega$ だから，

$$\langle X, X\rangle_\omega^+ + \langle X, X\rangle_\omega^- = 2\langle X, X\rangle_\omega.$$

となる．そこで，$\langle X, X\rangle_\omega^\pm \geq 0$ より (1)，(2) がでる．

同様に，命題 4.5 の (4),(5) および $\langle X, X\rangle_\omega^\pm \geq 0$ より，(3),(4) がでる．

次に (5) を示す．$X, Y \in \mathcal{H}_\omega^h$ に対して，$Z = X + iY \in \mathcal{H}_\omega$ とおく．このとき，$0 \leq \langle Z, Z\rangle_\omega^- = \langle X + iY, X + iY\rangle_\omega^- = \langle X, X\rangle_\omega^- + \langle Y, Y\rangle_\omega^- + i\langle Y, X\rangle_\omega^- - i\langle Y, X\rangle_\omega^-$ である．$\langle X, X\rangle_\omega^- = \langle X, X\rangle_\omega^+ = \langle X, X\rangle_\omega$ であり，補題 3.1 の証明から任意の $X, Y \in \mathcal{H}_\omega^h$ に対して $\langle X, Y\rangle_\omega^- = \overline{\langle X, Y\rangle_\omega^+}$ だから，

$$\begin{aligned}
i\langle Y, X\rangle_\omega^- - i\langle X, Y\rangle_\omega^- &= -i\left\{\langle X, Y\rangle_\omega^- - \overline{\langle X, Y\rangle_\omega^-}\right\} \\
&= -i\left\{\langle X, Y\rangle_\omega^- - \langle X, Y\rangle_\omega^+\right\} \\
&= -[X, Y]_\omega.
\end{aligned}$$

を得る．したがって

$$0 \leq \langle X, X\rangle_{\omega}^{-} + \langle Y, Y\rangle_{\omega}^{-} - [X, Y]_{\omega} = \langle X, X\rangle_{\omega} + \langle Y, Y\rangle_{\omega} - [X, Y]_{\omega}.$$

である．

最後に (6) を証明しよう．命題 4.3 及び $\mathcal{A}/\mathcal{N}_{\omega}$ が $\mathcal{H}_{\omega}$ で稠密であることより，容易に

$$|[X, Y]_{\omega}|^2 \leq 4\langle X, X\rangle_{\omega}\langle Y, Y\rangle_{\omega} \quad for \quad X, Y \in \mathcal{H}_{\omega}.$$

を得る． ■

この定理の応用として，[1, 2] での証明と同様にして一般不確定性関係を示すことができる．[1, 2]. *-代数の特別な場合としてヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体の集合 $B(\mathcal{H})$ を考え，正値線形汎関数として $\omega_S(A) \equiv Tr(SA)$ for $A \in B(\mathcal{H})$ をとる．定理 4.6 の (6) 式において， X ，Y に対してそれぞれ $X_1 - E_S(X_1)$ ，$X_2 - E_S(X_2)$ を代入すると次の関係式を得る．

$$D_S(X_1)D_S(X_2) \geq \frac{1}{4}|\,[X_1, X_2]_S\,|^2.$$

さらに，任意の実数値観測 $\mathbf{M} = \{M(dx)\}$ に対して

$$X_{\mathbf{M}} \equiv \int \mathbf{M}(dx),$$

とおく．すると 2 種類の観測 $\mathbf{M}_1$，$\mathbf{M}_2$ に対して，一般不確定性関係 (1.1) を得る．

5 関連する話題

関連する話題として，参考文献 [1] 中の *commutation superoperator* に対応する有界な歪エルミート作用素について議論しよう．$\mathcal{D}$ を，有界な歪エルミート汎双線形形式に対応する有界な歪エルミート作用素，すなわち

$$[X, Y]_{\omega} = \langle \mathcal{D}X, Y\rangle_{\omega} \quad for \quad X, Y \in \mathcal{H}_{\omega}.$$

とする．このとき次の命題を得る．

命題 5.1 有界な歪エルミート作用素 $\mathcal{D}$ は次の性質をもつ．

(1) $1 + \frac{i}{2}\mathcal{D} \geq 0$,

(2) $1 - \frac{i}{2}\mathcal{D} \geq 0$,

(3) $1+\frac{i}{4}\mathcal{D}^2=(1+\frac{i}{2}\mathcal{D})(1-\frac{i}{2}\mathcal{D})\geq 0.$

(証明)

(1) 等式

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle_\omega^+ &= \langle X,Y\rangle_\omega+\frac{i}{2}[X,Y]_\omega\\ &= \langle X,Y\rangle_\omega+\frac{i}{2}\langle\mathcal{D}X,Y\rangle_\omega\\ &= \langle(1+\frac{i}{2}\mathcal{D})X,Y\rangle_\omega.\end{aligned}$$

が成り立つから，作用素 $1+\frac{i}{2}\mathcal{D}$ は $\mathcal{H}_\omega$ 上の正値半双線形形式 $[,]_\omega^+$ に対応する有界作用素である．故に $1+\frac{i}{2}\mathcal{D}\geq 0$ である．

(2) 同様に，$\langle X,Y\rangle_\omega^-=\langle(1-\frac{i}{2}\mathcal{D})X,Y\rangle_\omega$ からでる．

(3) 有界作用素 $\frac{i}{2}\mathcal{D}$ はエルミートだから，$\frac{i}{2}\mathcal{D}$ のスペクトル分解を $\frac{i}{2}\mathcal{D}=\int\lambda dE(\lambda)$ とおく．すると $1+\frac{i}{2}\mathcal{D}=\int(1+\lambda)dE(\lambda)\geq 0$ だから，$\frac{i}{2}\mathcal{D}$ のスペクトルは $Sp\left\{\frac{i}{2}\mathcal{D}\right\}\subset[-1,\infty)$ である．

同様に $\frac{i}{2}\mathcal{D}$ のスペクトルは $1-\frac{i}{2}\mathcal{D}=\int(1-\lambda)dE(\lambda)\geq 0$ より，$Sp\left\{\frac{i}{2}\mathcal{D}\right\}\subset(\infty,1]$ となる．故に，$Sp\left\{\frac{i}{2}\mathcal{D}\right\}\subset[-1,1]$ となる．このことより，

$$1+\frac{1}{4}\mathcal{D}^2=(1+\frac{i}{2}\mathcal{D})(1-\frac{i}{2}\mathcal{D})=\int(1+\lambda)(1-\lambda)dE(\lambda)\geq 0.$$

を得る．

■

注 5.2 *Holevo* はフォンノイマン代数上の正規状態が *faithful* であるための必要十分条件は $\frac{i}{2}\mathcal{D}$ が *non-degenerate* であることを示した．我々の一般的な状況の下で，このことが成り立つかどうかは，不明であり今後の課題の一つである．

本論文で，我々は*-代数上の正値線形汎関数による半双線形形式を導入し，参考文献 [1] の中の議論よりも一般的な状況の下で不確定性原理に関する不等式を示した．また，有界な歪エルミート作用素と富田一竹崎理論との関連について議論できるであろうことを指摘しておきたい．このことは今後の論文の中で展開する予定で

References

[1] A.S.Holevo, *Commutation superoperator of a state and its applications to the noncommutative statistics*, Rep. Math. Phys., Vol.12,pp.251-271(1977).

[2] A.S.Holevo, *Probablistics and Statistical Aspects of Quantum Theory*, NORTH-HOLLAND, 1982.

[3] A.Inoue, *Tomita-Takesaki theory in algebras of unbounded operators*, Lecture Notes in Mathematics No.1699, Springer-Verlag, 1988.

[4] M.Takesaki, *Theory of operator algebras I*, Springer-Verlag, 1979.

[5] O.Bratteli and W.Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*, Springer-Verlag, 1987.